Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Präsenzblatt 2 — 12./13. Januar 2023

Aufgabe 1: Betrachte die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Zeige, dass die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe konvergiert.

Hinweis: Die Monotonie der Wurzel darf verwendet werden.

(b) Zeige, dass das Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst, also

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k,$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 2: Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$a_n := 5^{-n} \quad \text{und} \quad b_n := 13^{-n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Zeige, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergieren und bestimme ihren Wert.

(b) Zeige *nur* über die Formel für das Cauchy-Produkt,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

und unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten Konvergenzkriterien, dass das Cauchy-Produkt der zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Reihen absolut konvergiert.

(c) Berechne nun den Wert dieses Cauchy-Produkts

- über die Formel für das Cauchy-Produkt in (b) *und*
- über das Produkt der zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Reihen.

Aufgabe 3: Berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\cdot x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}}\cdot x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\cdot x^n$